MỘT SỐ BÀI TOÁN CUỐI ĐỀ THI GIỮA KÌ LỚP 8

MỘT SỐ CÂU CUỐI ĐỀ THI GIỮ KÌ LỚP 8

Bài 1. (0,5đ) (THCS NGUYỄN DU NĂM HỌC 2015-2016)

Tìm GTNN của biểu thức A biết

$A=\dfrac{x^2-2x+2016}{x^2}$ với $x>0$.

Lời giải

Xét $A=\dfrac{x^2-2x+2016}{x^2}$

$A=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2016}{x^2}=1+2016\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{1008x}\right)$

$A=1+2016\left(\dfrac{1}{x^2}-2.\dfrac{1}{2016x}+\dfrac{1}{2016^2}-\dfrac{1}{2016^2}\right)$

$A=1+2016\left(\dfrac{1}{x^2}-2.\dfrac{1}{2016x}+\dfrac{1}{2016^2}\right)-\dfrac{1}{2016}$

$A=1+2016\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2016}\right)^2-\dfrac{1}{2016}$

$A=\dfrac{2015}{2016}+2016\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2016}\right)^2$

Mà $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2016}\right)^2\ge 0 \quad \forall x>0$

$\Rightarrow A=\dfrac{2015}{2016}+2016\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2016}\right)^2\ge\dfrac{2015}{2016}$

$\Rightarrow A_{Min}=\dfrac{2015}{2016}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2016}\Leftrightarrow x=2016$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{2015}{2016}$ khi $x=2016$.

Bài 2. (0.5đ) (THCS GIÁP BÁT)

Tìm GTLN của biểu thức: $B=-3x^2-12x-8$

Lời giải

Xét $B=-3x^2-12x-8$

Website: aplusedu.vn
Hệ thống giáo dục Aplus
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS

$B=-3\left(x^2+4x\right)-8$

$B=-3\left(x^2+4x+4-4\right)-8$

$B=-3\left[\left(x+2\right)^2-2\right]-8$

$B=-3\left(x+2\right)^2+6-8$

$B=-3\left(x+2\right)^2-2$

Mà $\left(x+2\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow -3\left(x+2\right)^2\le 0 \Rightarrow B=-3\left(x+2\right)^2-2\le -2$

Suy ra $B_{MAX}=-2 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Vậy B đạt giá trị lớn nhất là -2 khi $x=-2$.

Bài 3. (0,5đ) (TRƯỜNG THCS HỒNG DƯƠNG NĂM 2016-2017)

Tìm x,y,z thỏa mãn $9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$.

Lời giải

$9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$

$9x^2-18x+9+y^2-6y+9+2z^2+4z+2=0$

$\left(3x-3\right)^2+\left(y-3\right)^2+2\left(z+1\right)^2=0$

Mà $\left(3x-3\right)^2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$; $\left(y-3\right)^2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$; $\left(z+1\right)^2\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy suy ra $9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$ khi và chỉ khi $3x+3=0$; $y-3=0$ và $z+1=0$.

Xét

$3x-3=0\Rightarrow x=1$

$y-3=0\Rightarrow y=3$

$z+1=0\Rightarrow z=-1$

Vậy $9x^2+y^2+2z^2-18x+4z-6y+20=0$ khi và chỉ khi $\left(x;y;z\right)=\left(1;3;-1\right)$.

Bài 4. (0,5đ) (TRƯỜNG THCS LÊ NGỌC HÂN NĂM 2016-2017)

Tìm GTNN của biểu thức $A=a^4-2a^3+2a^2-2a+2$.

Lời giải

$A=a^4-2a^3+2a^2-2a+2$

$A=a^4-2a^3+a^2+a^2-2a+1+1$

$A=\left(a^2-a\right)^2+\left(a-1\right)^2+1$

Website: aplusedu.vn
Hệ thống giáo dục Aplus
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS

Mà $\left(a^2-a\right)^2\ge 0;\left(a-1\right)^2\ge 0\Rightarrow \left(a^2-a\right)^2+\left(a-1\right)^2\ge 0\Rightarrow A=\left(a^2-a\right)^2+\left(a-1\right)^2+1\ge 1$

$\Rightarrow A_{\min}=1\Leftrightarrow a^2-a=0$ và $a-1=0$.

Xét $a^2-a=0\Leftrightarrow a\left(a-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right.$

$a-1=0\Leftrightarrow a=1$

Vậy $A_{\min}=1$ khi $a=1$.

Bài 5. (0,5đ) (TRƯỜNG THCS NGHĨA TÂN NĂM 2016-2017)

Tìm GTNN của biểu thức $A=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+2x+1}, x\ne -1$.

Lời giải

Xét $A=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+2x+1}$

$A=2-\dfrac{2x+1}{x^2+2x+1}=2-\dfrac{2\left(x+1\right)-1}{\left(x+1\right)^2}$

$A=2-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}$

$A=\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}-\dfrac{2}{x+1}+2$

$A=\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}-2.\dfrac{1}{x+1}+1+1$

$A=\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)^2+1$

Mà $\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)^2\ge 0\Rightarrow \left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)^2+1\ge 1\Rightarrow A_{Min}=1\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}-1=0\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$.

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $x=0$.

Bài 6 (0,5 điểm)(NGÔI SAO NĂM 2020-2021)

a) Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}=a^{1010}b^{1010}+b^{1010}c^{1010}+c^{1010}a^{1010}$.

Tính giá trị của biểu thức sau $A=\left(a-b\right)^{20}+\left(b-c\right)^{11}+\left(c-a\right)^{2020}$.

b) Chứng minh rằng với mọi $x\in Q$ thì giá trị của biểu thức $A=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ là bình phương của một số hữu tỷ?

Website: aplusedu.vn
Hệ thống giáo dục Aplus
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS

Lời giải

a) Chứng minh bài toán phụ $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ khi và chỉ khi $x=y=z$.

Xét $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+x^2-2zx+z^2=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

Mà $(x-y)^2\ge 0\ \forall x;y$; $(y-z)^2\ge 0\ \forall y;z$; $(z-x)^2\ge 0\ \forall z;x$

$\Rightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Đặt: $\begin{cases} x=a^{1010}>0 \\ y=b^{1010}>0 \\ z=c^{1010}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=a^{2020} \\ y^2=b^{2020} \\ z^2=c^{2020} \end{cases}$. Khi đó, ta có: $gt \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$.

Theo chứng minh trên suy ra $a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}=a^{1010}b^{1010}+b^{1010}c^{1010}+c^{1010}a^{1010}$ khi và chỉ khi $a^{1010}=b^{1010}=c^{1010}$ mà $a,b,c>0$ suy ra $a=b=c$

Do đó: $A=(a-b)^{20}+(b-c)^{11}+(c-a)^{2020}=(a-a)^{20}+(b-b)^{11}+(c-c)^{2020}=0$.

b) Ta có $A=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$A=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1$

$A=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

Đặt $t=x^2+5x+4 \Rightarrow t+2=x^2+5x+6$

$\Rightarrow A=t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2$ với $t=x^2+5x+4$ suy ra $\Rightarrow A=(x^2+5x+5)^2$.

Vậy với mọi $x\in Q$ thì giá trị của biểu thức A là bình phương của một số hữu tỷ (đ.p.c.m).

Câu 7.(0,5 điểm) (THCS ARCHIMEDES ACADEMY)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$Q=3x^2+2y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz-4x-2y+5$$

Lời giải

$Q=3x^2+2y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz-4x-2y+5$

$=(x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4xz)+2(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+2$

$=(x+y+2z)^2+2(x-1)^2+(y-1)^2+2$

Do đó $Q\ge 2$, MinQ = 2. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$x-1=0$; $y-1=0$ và $x+y+2z=0$

Xét

Website: aplusedu.vn
Hệ thống giáo dục Aplus
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS

$x-1=0\Rightarrow x=1$

$y-1=0\Rightarrow y=1$

Thay $x=1;\ y=1$ vào $x+y+2z=0\Rightarrow z=-1$.

Vậy $Q_{\min}=2$ khi $(x;y;z)=(1;1;-1)$.

Bài 8 (1 điểm) (TRƯỜNG THCS NAM TỪ LIÊM)

a) Chứng minh rằng trong ba số $x;y;z$ tồn tại hai số bằng nhau nếu:

$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$

b) Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh a,b,c thỏa mãn đẳng thức

$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8$

Chứng tỏ tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải

a) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$

$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$

$\Leftrightarrow x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y=0$

$\Leftrightarrow xy(x-y)-z(x^2-y^2)+z^2(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(xy-z(x+y)+z^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(xy-xz-zy+z^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x-z)(y-z)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\x=z\\y=z\end{array}\right.$

Vậy nếu $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0$ thì sẽ tồn tại hai số bằng nhau trong ba số.

b) $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=8$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=8abc$

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$

Áp dụng cho hai số dương : BĐT Cosi $b+c\ge 2\sqrt{bc}$

$c+a\ge 2\sqrt{ca}$

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Website: aplusedu.vn
Hệ thống giáo dục Aplus
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS

Bài 9: (0,5 điểm) (TRƯỜNG THCS CẦU DIỄN)

Tính giá trị của đa thức $P=4x^4+7x^2y^2+3y^4+5y^2$ biết $x^2+y^2=5.$

Lời giải

$P=4x^4+7x^2y^2+3y^4+5y^2$

$=4x^4+4x^2y^2+3x^2y^2+3y^4+5y^2$

$=4x^2\left(x^2+y^2\right)+3y^2\left(x^2+y^2\right)+5y^2$

$=4x^2.5+3y^2.5+5y^2$

$=20\left(x^2+y^2\right)=20.5=100$

Bài 10 (0,5 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=x^2-4xy+5y^2+10x-22y+2042$$

Lời giải

Đưa về dạng bất đẳng thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

$P=x^2-4xy+5y^2+10x-22y+2042$

$P=x^2+4y^2+25-4xy+10x-20y+y^2-2y+1+2016$

$P=x^2+(2y)^2+5^2-2.x.2y+2.x.5-2.2y.5+y^2-2y+1+2016$

$P=(x-2y+5)^2+(y+1)^2+2016$

Mà $(x-2y+5)^2\geq 0$ với mọi x,y; $(y+1)^2\geq 0\ \forall x,y$ suy ra $(x-2y+5)^2+(y+1)^2\geq 0\ \forall x,y$

$\Rightarrow P=(x-2y+5)^2+(y+1)^2+2016\geq 2016$

Suy ra $P_{Min}=2016$ khi và chỉ khi $x-2y+5=0$; $y+1=0$.

Xét $y+1=0\Rightarrow y=-1$

Thay $y=-1$ vào $x-2y+5=0$ suy ra $x=2$.

Vậy với $(x;y)=(2;-1)$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất $P_{Min}=2016$.

Bài 11 (*0,5 điểm*). TRƯỜNG THCS - THPT LƯƠNG THẾ VINH 2020-2021

Cho các số *x, y* thỏa mãn điều kiện:

$$x^2-2xy+6y^2-12x+2y+41=0.$$

Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{2020-2019(9-x-y)^{2019}-(x-6y)^{2018}}{y^{1010}}$.

Lời giải

Đưa về dạng bất đẳng thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Website: aplusedu.vn
Hệ thống giáo dục Aplus
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS

Ta có: $x^2-2xy+6y^2-12x+2y+41=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2-12x+12y+36)+(5y^2-10y+5)=0$

$\Leftrightarrow (x-y-6)^2+5(y-1)^2=0$

Mà $(x-y-6)^2\ge 0$ với mọi x,y; $(y-1)^2\ge 0\ \ \forall x,y$ suy ra $(x-y-6)^2+5(y-1)^2\ge 0\ \ \forall x,y$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x-y-6=0$ và $y-1=0$.

Xét $y-1=0\Leftrightarrow y=1$

Thay vào $x-y-6=0$ suy ra $x=7$

Khi đó: $A=\dfrac{2020-2019.1^{2019}-1^{2018}}{1^{1010}}=0$

Website: aplusedu.vn
Hệ thống giáo dục Aplus
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS
HỆ THỐNG GIÁO DỤC APLUS